إسهامات علماء العرب والمسلمين القدامى في إثراء علوم الرياضات

م.م. سماهر محمد سرحان
كلية الهندسة الخوارزمي/ جامعة بغداد
Email: samaher.m@kecbu.uobaghdad.edu.iq

تاريخ النشر : ٢٠٢٣/٦/٣٠
تاريخ الاستلام : ٢٠٢٣/١/٢ تاريخ القبول : ٢٠٢٣/٣/١٤
DOI: 10.54721/jrashc.20.2.967

الملخص :

كان لعلماء العرب والمسلمين إسهامات فاعلة في تطور علوم الرياضيات عن طريق رفده بالعديد من الإنجازات والاختراعات. يعرض هذا البحث أهم هذه الإنجازات والإسهامات في مجال الرياضيات خلال فترة النهضة الإسلامية لمختلف العلماء العرب والمسلمين. من أوضح وابرز الأمثلة على هذه الانجازات هو تأسيس علم الجبر واكتشاف الصفر وإضافته إلى الأعداد من قبل العالم الخوارزمي، مما سهل حل الكثير من المشاكل والمسائل الحسابية إلى يومنا هذا.

الكلمات المفتاحية: علم الرياضيات، الجبر، الأعداد، الحضارة الإسلامية

Contributions of Arab and Muslim scientists to enrichment mathematics Science

assist . teacher. Samaher Mohammad Sarhan.
Faculty of engineering al-Khwarizmi / University of Baghdad

Abstract:

Arab and Muslim scholars have made influential contributions to the development of mathematics by providing it with many achievements and inventions. This research presents the most important of these achievements and assistance in mathematics during the period of the Islamic Renaissance for different Arab and Muslim Scholars. One of the clearest and most prominent examples of these achievements is the establishment of the science of algebra and the discovery of zero and added to the numbers by the Muslim Scholar of Al-Khwarizmi, which facilitated the solution of many arithmetic problems and issues to this day.

Keywords: Mathematics, Algebra, Numbers, Islamic Civilization.

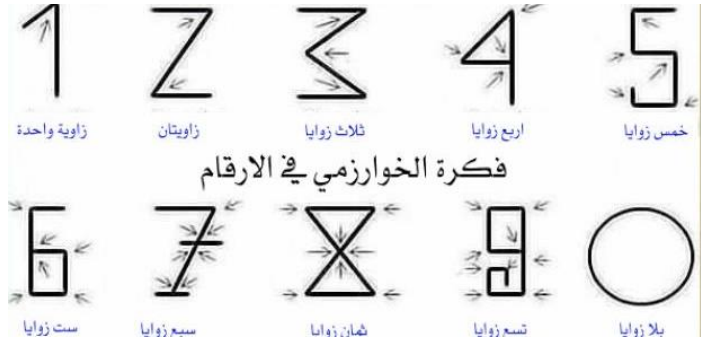
المقدمة

مارس الكتبة البابليون كتابة الأعداد منذ ٣٠٠٠ سنة وكذلك حساب الأرباح المتأتية من مزاولة التجارة في بابل. حيث استخدمت الألواح الصلصالية لكتابة الأرقام وفق النظام الستيني والمؤلف من ستين عددا" (١-٦٠)، إضافة إلى تدوين العمليات الحسابية على هذه الألواح. ومازال هذا النظام يتبع حتى وقتنا الحالي في حساب زوايا المثلثات وقياس الزمن (الساعة تساوي ستون دقيقة والدقيقة تعادل ستون ثانية).

تم تطوير هذا النظام من قبل قدامى المصريين لاحتساب مقدار الضرائب على الأراضي بعدل حدوث أي فيضان، حيث تمت عملية العد باستخدام الآحاد والعشرات والمئات في النظام العشري المطور والذي أفتقد لاستخدام الصفر حيث لم يكن موجودا" في حينها. على سبيل المثال، كتبوا الرقم ٦٠٠ من خلال استخدام ست رموز، حيث يشير كل رمز إلى ١٠٠.

من جانب آخر، فقد ابتكرت الأرقام العربية في بلاد الهند وأطلق عليها علم الخانات من قبل العرب الذين أخذوها عنهم حيث مازالت تستخدم إلى يومنا هذا. وعندما اطلع العالم الخوارزمي على علوم الهنود وحساباتهم لاحظ إنهم يتركون فراغا أو يضعون نقطا صغيرة بين الأعداد لتمييز القيمة المنزلية للعدد وفي ضوء ذلك قرر الخوارزمي وضع شكل بيضوي يدل على هذا الفراغ وأطلق عليه اسم الصفر إي الشيء الخالي و عدّه عدداً كما موضح في الشكل رقم ١.

وبذلك يعد المسلمون أول من أخترع و أبتكر الصفر الذي كان له أثر في مساعدة العلماء في حل عدد كبير من المعادلات الرياضية على اختلاف درجاتها وتعقيدها في وقتنا الحالي.



شكل رقم ١: الصفر الذي ابتكره الخوارزمي

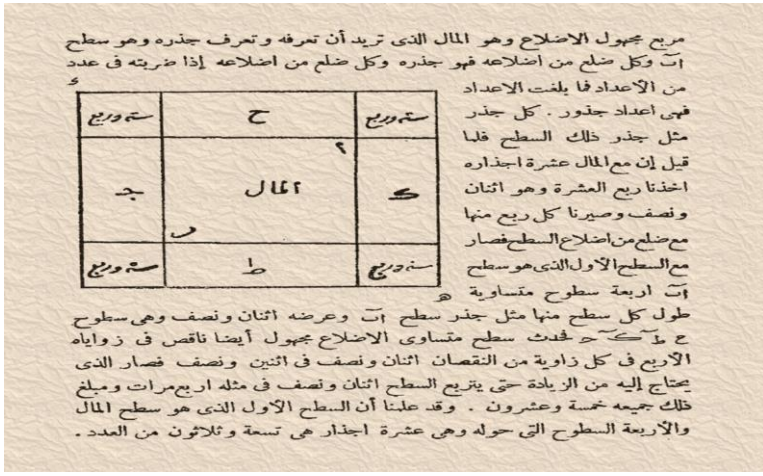
١. **إسهامات العرب و المسلمين في علوم الرياضيات**

أولا:- البيروني :يكنى بأبي الريحان البيروني، حيث كان اسمه محمد بن أحمد أبي الريحان البيروني الخوارزمي. نشأ يتيما" حيث مات أبوه وهو صغير مما دفعه إلى العمل لإعالة أمه. قابل ذات يوم عالما" يونانيا" وطلب العمل لديه لقاء الأجر والتعليم ، فوافق على الفور ودهش من معرفة البيروني للغة العربية و الفارسية وبدأ يعلمه اليونانية و السريانية (١). دون البيروني العلوم الهندية القديمة في كتابه المعروف " تحقيق ما للهند من مقوله مقبولة في العقل أو مرذوله " والذي كان من أبرز إسهاماته في علوم الرياضيات، وقد وصف المستشرق الايطالي آلدو ميلي هذا الكتاب بقوله إنه المرجع الأساسي بكل ما يتصل بحياة الشعب الهندي(٢) وكذلك يصف المستشرق روزن هذا الكتاب بأنه أثر فريد في بابه لا مثيل له في الأدب العلمي القديم أو الوسيط سواء في الغرب أو الشرق(٣) .

شكل رقم ٢: رسم تخيلي للبيروني على طابع للاتحاد السوفيتي من عام ١٩٧٣م (٤).

ثانياً: الخوارزمي:- اسمه محمد بن موسى الخوارزمي اشتهر بالخوارزمي ،دعاه الخليفة المأمون للعمل في دار الحكمة ، مما مكنه من معرفة وترجمة علوم الهنود واليونانيين واستطاع في عمله هذا الإطلاع على الأعمال الهندية و اليونانية وترجمتها ، حيث ساعده هذا التبحر الكبير إلى تقديم الكثير من الأعمال و المؤلفات المهمة في الجبر و المثلثات و رسم الخرائط والعديد من المؤلفات (٥). ومن أهم إسهامات هذا العالم في علوم الرياضيات هو تأسيس علم الجبر الذي ابتكره هذا العالم ليحل به بعض المسائل الصعبة في قضايا الميراث ، ووضع له الأصول والقواعد ما جعله علماً مستقلاً عن الهندسة وبقية أنواع الرياضيات .

ومما يجدر ذكره هنا هو أن الخوارزمي أول من استعمل كلمة (جبر) التي أخذها عنه الأوربيون ، فما زال الجبر يعرف باسمه العربي في جميع اللغات الأوربية ، و ترجع كل الكلمات التي تنتهي في اللغات الأوربية بـ(algorism\ algorithm) الى اسم الخوارزمي(٦) ولهذا كان الخوارزمي أهلاً لتسميته بأبي الجبر (٧) . وبفضل ترجمة كتابه الجبر و المقابله انتقل الحساب الهندي والنظام العشري في الحساب الى أوربا . ومن أهم ما قام به الخوارزمي أيضاً في الرياضيات هو تطوير أسلوب حل المربعات المجهولة – المعادلات من الدرجة الثانية- بطريقة هندسية ومنطقية(٨) . ولقد قدم الخوارزمي فضلاً إلى ما سبق ، جداول للنسب المثلثية (لجيوب و ظلال زوايا المثلثات)، وقد ترجمت فيما بعد في القرن الثاني عشر إلى اللغة اللاتينية (٩) . ومن بعض الكُتاب الغرب الذين اعتمدوا في كُتبهم على كتاب الخوارزمي (الجبر والمقابله) بشكل واضح و صريح منهم السكندريفيلادي في كتابه(camrmendealgorism) عام ١٢٢٠م وبعده بثلاثين عام قدم جون اوفاهاليفاكسن كتاباً اخر اسمه (algorismvulgaris) الذي بني على الأساس نفسه (١٠) .


مربع مجهول الاضلاع وهو المال الذى تريد أن تعرفه وتعرف جذره وهو سطح
آ ت وكل ضلع من اضلاعه فهو جذره وكل ضلع من اضلاعه إذا ضربته فى عدد
من الأعداد فما بلغت الاعداد
فهى اعداد جذور . كل جذر
مثل جذر ذلك السطح فلما
قيل إن مع المال عشرة اجذاره
اخذنا ربع العشرة وهو اثنان
ونصف وصيرنا كل ربع منها
مع ضلع من اضلاع السطح فصار
مع السطح الأول الذى هو سطح
آ ت اربعة سطوح متساوية
طول كل سطح منها مثل جذر سطح آ ت وعرضه اثنان ونصف وهى سطوح
ع ط ك ح فحدث سطح متساوى الاضلاع مجهول أيضا ناقص فى زواياه
الاربع فى كل زاوية من النقصان اثنان ونصف فى اثنين ونصف فصار الذى
يحتاج إليه من الزيادة حتى يتربع السطح اثنان ونصف فى مثله اربع مرات ومبلغ
ذلك جميعه خمسة وعشرون . وقد علمنا أن السطح الأول الذى هو سطح المال
والأربعة السطوح التى حوله وهى عشرة اجذار هى تسعة وثلاثون من العدد .

ستة وربع	ح	ستة وربع
جـ	المال	ك
ستة وربع	ط	ستة وربع

شكل رقم ٣: صورة من كتاب الجبر والمقابلة

ثالثاً: أبو الحسن القلصادي : اسمه أبو الحسن علي بن علي القرشي البسطي القلصادي (٨١٥-٨٩١هـ\١٤١٢-١٢٨٦م). لقد كان لهذا العالم إسهامات بالغة في تقدم الرياضيات على اختلاف فروعها فهو أول من استعمل الإشارات والرموز الجبرية المستعملة في الجبر حتى وقتنا هذا والتي ورد ذكرها في كتابه " كشف الأسرار"، حيث يقول فلورين كاجوريcajori في كتابه (مختصر تاريخ الرياضيات):"اشتغل القلصادي بالحساب وألف فيه تأليف نفيسه و أبدع في نظرية الأعداد وله في ذلك ابتكارات ، كما له بحوث في الجبر جليلة و مؤلفه (كشف الأسرار عن علم الغبار) ، أول كتاب اثبت للأوربيين ، بأن الإشارات الجبرية كانت مستعمله عند علماء الرياضيات المسلمين" .

فرمز كما يقول كاجوريcajori :

لعلامة الجذر بالحرف الأول من كلمة جذر (جـ)

وللمجهول بالحرف الأول من كلمة شئ (ش) يعني (س)

ولمربع المجهول بالحرف الأول من كلمة مال (م) يعني ($س^{٢}$)

ولمكعب المجهول بالحرف الأول من كلمة كعب (ك) يعني ($س^{٣}$)

ولعلامة المساوات بالحرف (ل)

و للنسبة بثلاث نقاط (...) .

وقد اكتُشف أن احد الرياضيين الغربيين وهو فرانسوا فيته الذي عاش فيما بين (١٥٤٠-١٦٠٣م) ،الذي اشتهر بعلم المثلثات و الهندسة و الجبر ، قد أخذ رموز القلصادي في مبدأ استعمال الرموز في الغرب و نسبها لنفسه(١١) .

رابعاً: غياث الدين الكاشي: ولد غياث الدين الكاشي في سنة ١٣٨٠م وكان من أعظم العلماء الذين اشتهروا في القرن التاسع الهجري، ومن أهم إسهامات هذا العالم في علوم الرياضيات

هو ابتكار الكسور العشرية ، ويقول سمث في كتابه (تاريخ الرياضيات) :"إن الخلاف بين علماء الرياضيات كبير ، ولكن غالبيتهم تتفق على أن الكاشي هو الذي أبتكر الكسر العشري"، وبذلك فان الكاشي سبق ستيفن بأكثر من ١٥٧ سنة في وضع علامة الكسر العشري واستعملها ،فقد بين في كتابه (مفتاح الحساب) فوائد استعمال الكسور العشرية وطريقة الحساب بها، كما انه يذكر في مقدمة هذا الكتاب أنه اخترع الكسور العشرية، ليسهل الحساب للأشخاص الذين يجهلون الطريقة الستينية (١٢).

كما وضع الكاشي قانوناً خاصاً بتحديد قياس أحد أضلاع المثلث انطلاقاً من قياس ضلعيه الآخرين وقياس الزاوية المقابلة له فضلاً عن قانون خاص بمجموع الأعداد الطبيعية المرفوعة إلى القوة الرابعة. ويقول(كارادي فو) في حديثه عن علماء الفلك المسلمين "ثم يأتي الكاشي فيقدم لنا طريقة لجمع المتسلسلة العددية بمجموع الأعداد المرفوعة إلى القوة الرابعة ،وهي الطريقة التي لا يمكن أن يتوصل اليها بقليل من النبوغ"(١٣).

ومن الجدير ذكره هنا إن هناك صيغة معروفه:

$$\sin 3\emptyset = 3\sin\emptyset - 4sin^3\emptyset$$

والتي تستخدم في حساب الجيب (وتطبيقات أخرى) وهي معروفة بصيغة فييت نسبة إلى العالم الفرنسي فرانسوا فييت (١٥٤٠-١٦٠٣م) عن طريق الخطأ، ولكن الكاشي هو أول من اكتشف تلك الصيغة (١٤) .

خامساً: عمر الخيام (٤٢٦-٥١٧هـ): ولد عمر الخيام في نيسابور سنة ٤٢٦ هـ وتوفى ٥١٧هـ وكان اسمه غياث الدين عمر بن إبراهيم الخيام، كان والده يعمل في صناعة الخيام لذلك لقب بالخيام. من أهم إسهاماته في علوم الرياضيات هو كتابه (شرح ما أشكل من مصادرات كتاب إقليدس) حين استخدم رباعيات الأضلاع بحيث يكون الضلعين المتجاورين عموديين على القاعدة في محاولة إثبات مسلمة التوازي ،كان هدف الخيام إثبات المسلمة من خلال الوصول إلى التناقض . وقد استخدم العالم الايطالي سشيري هذه الرباعيات فعرفت بعد ذلك برباعيات الخيام- سشيري.

ويُعَدُّ الخيام أول من حاول بناء هندسة لا اقليدية، كما حاول الخيام في كتابه (مقالة في الجبر والمقابلة) حل المعادلات التكعيبية بطريقة هندسية بالاعتماد على مفهوم القطع المكافئ والدائرة ، وبتأمل حل الخيام للمعادلات التكعيبية يتبين جلياً أنه تحدث عن الإحداث الأفقي (الإحداث السيني) ليفسر الإحداثيين للنقطة وبذلك يكون عمر الخيام أول من وضع لبنات علم الهندسة التحليلية، تلك التي تنسب للعالم الفرنسي رينيه ديكارت، الذي لا نشك أنه طور الهندسة التحليلية وأرسى أصولها (١٥).

شكل رقم ٤: صورة من كتاب (مقالة في الجبر والمقالة) للعالم عمر الخيام

٣. الأنماط الحسابية ورحلة الأرقام العربية إلى أوربا

كانت البلدان الإسلامية في القرن العاشر تستخدم ثلاثة أنماط في الحساب هي:

أولاً: النظام العشري: يسمى هذا النظام بـ(حساب الروم) أي البيزنطيين، ويعتقد أنه دخل إلى العالم الإسلامي عن طريق التجار والباعة العرب، وهذا النظام يستخدم الرموز الإصبعية للإشارة إلى الأعداد، حيث يقوم المحتسب طي أصابعه في وضعيات مختلفة تسمح بتمثيل الأعداد من ١ إلى ٩٩٩، وهذه الوضعيات موجودة في حساب الأقليدسي وتسمى هذه الوضعيات بـ(عقود) لذلك يسمى هذا النظام أيضا بـ(حساب العقود)(١٧).

ثانياً: النظام الستيني :ينحدر هذا النظام من قدماء البابليين ووصل إلى العالم الإسلامي عن طريق أقنية سريانية وفارسية. يعتمد هذا النظام على موضع الرقم من العدد، ويعتبر كأول نظام عد موضعي حتى الآن، وما زال هذا النظام يستخدم في قياس الزمن و الزوايا الهندسية ونظام الإحداثيات الجغرافية(١٧).

ثالثاً: النظام العشري: سمي النظام العشري بهذا الاسم لأنه يستخدم الرقم (١٠) كأساس في تمثيل مختلف الإعداد وهو من أكثر الأنظمة شيوعا"، حيث يتم تمثيل العدد حسب مرتبته فالرقم ١ في منزلة الآحاد يساوي واحد، وفي منزلة العشرات يساوي عشرة، وهكذا.

ومما يجدر ذكره هنا أن هذا النظام يسمى نظام العد الهندو- عربي لان رموزه تنسب إلى الهنود(مئتي عام قبل الميلاد) والتي اعتمد عليها العرب في حسابتهم لاحقاً.

٤. كيف انتقلت الأرقام العربية الى أوربا

دخلت الأرقام العربية إلى أوربا عن طريق البابا جيربرت Gerbert (سيلفستر الثاني) الذي درس في جامعة القرويين في اسبانيا الإسلامية (قرطبة)،ليتلقى من العرب المسلمين العلم ، فدرس الهندسة والميكانيكا (علم الحيل) والفلك وسائر العلوم المعرفية في ذلك العصر عند العرب، حيث كان الوحيد الذي أجاد في علوم اللغة العربية وسائر العلوم الأخرى على أيدي عرب أسبانيا. وبعد عودته إلى روما حيث كانوا يستعملون الأرقام الرومانية التي لا تساعد على انجاز ابسط العمليات الحسابية حاول إدخال الأرقام العربية لكنه وجد صعوبة في ذلك، لأن الأُوربيين وقت ذالك لم يكونوا مهيأين ذهنياً لتقبل هذا العمل وكانوا يعدون كل الحضارات الأخرى متخلفة، لذلك قام جيربرت (سيلفستر الثاني) باختراع لوح أباكوس جديد سمي بأباكوس جيربرت وهو لوح مطور عن الوح الروماني و أكثر فاعلية، أستعمل فيه الأرقام العربية دون الصفر، لذلك تجد الصفر غير ظاهر في مخطوطات القرن العاشر والحادي عشر الميلادي(١٨).

بعد ذلك قام روبرت أوف تشستر وهو راهب ومستشرق إنكليزي عاش بالجزيرة اللإيبيرية في القرن الثاني عشر بترجمة كتابي "المقابلة والمختصر في حساب الجبر" للخوارزمي من العربية إلى اللاتينية، كما يعرف بأنه أول من ترجم القرآن إلى اللغة نفسها (١٧).

كما أسهم العالم الايطالي ليوناردو البيزي (١١٧٠-١٢٥٠م) الشهير بـ(فيبوناتشي) في نشر الارقام الهندية-العربية لأوربا عن طريق كتابه الذي نشره في القرن الثالث عشر بعنوان كتاب الأباشي (LiberAbaci)، إذ اطلع هذا العلم على هذه الأرقام عندما أرسله والده إلى بجاية بالجزائر ليتعلم الرياضيات فدرس على يد مدرس يدعى سيدي عمر، حيث عالج في كتابه آنفاً الأعداد العربية، وقد عرف الأعداد الجديدة بالكلمات الآتية: ((الأعداد الهندية التسعة هي (من اليمين إلى اليسار)123456789 وبهذه الأعداد مع الإشارة إلى "0"، التي يسميها العرب صفراً وسماها الأوربيون صفروم (Cephirom)(١٠).

ومما سبق يتضح لنا إن لعلماء المسلمين في عصر الحضارة الإسلامية مكانة مهمة في علم الرياضيات ، فقد أثروه وابتكروا فيه وطوروه ، فاستفاد العالم اجمع من الإرث الذي تركوه ، فقد جمع علماء المسلمين ما وصل إليه علماء الأمم السابقة في علوم الرياضيات ، ثم ترجموه ، و منه انطلقوا في الاكتشاف و الابتكار ، ويعد المسلمون أول من اشتغل في علم الجبر. بالمقابل، كان علم الحساب والعد بسيطاً جداً عند الأوربيين حين كان في طور الطفولة بينما كانت الحضارة العربية الإسلامية في أوج ازدهارها حيث كان تقدمهم عظيم في مجال الحساب.

الخاتمة:

بناء" على ما تم ذكره ومناقشته في متن البحث من خلال استعراض أبرز الإسهامات العلمية للعلماء العرب والمسلمين في مجال علوم الرياضيات، نلخص في أدناه أهم هذه الانجازات:

١. تدوين العلوم الهندسية الهندية القديمة من قبل العالم البيروني.
٢. قيام العالم الخوارزمي بتأسيس علم الجبر واخترع الصفر واللذان سهلا حل الكثير من المسائل الحسابية المعقدة.
٣. استخدام الإشارات والرموز الجبرية من قبل العالم القلصادي والتي ورد ذكرها في كتابه " كشف الأسرار" والتي مازالت تستعمل في الجبر حتى وقتنا هذا.
٤. من أهم إسهامات العالم غياث الدين الكاشي في علوم الرياضيات هو ابتكار الكسور العشرية.
٥. استخدام رباعيات الأضلاع من قبل العالم عمر الخيام في كتابه الشهير (شرح ما أشكل من مصادرات كتاب إقليدس).
٦. استخدام النظام العشري والستيني والثنائي في البلدان الإسلامية في القرن العاشر.
٧. نقل استخدام الأرقام العربية إلى أوربا عبر البابا جيربرت.

Conclusions:

Based on what was mentioned and discussed in the body of the research by reviewing the most prominent scientific contributions of Arab and Muslim scholars in the field of mathematics, we summarize below the most important of these achievements:

1. Codification of ancient Indian engineering sciences by the scholar Al-Biruni.
2. Al-Khwarizmi established the science of algebra and invented the zero, which made it easy to solve many complex arithmetic problems.
3. The use of algebraic signs and symbols by the scholar Al-Qalasadi, which were mentioned in his book “Kashf Al-Asrar”, which is still used in algebra to this day.
4. One of the most important contributions of the scientist Ghiyath Al-Din Al-Kashi to mathematics is the invention of decimal fractions.
5. The use of quadrilaterals by the scientist Omar Khayyam in his famous book (Explanation of the Confiscations of Euclid's Book).
6. The use of the decimal, sixty- and binary system in Islamic countries in the tenth century.
7. Transferring the use of Arabic numerals to Europe through Pope Gerbert.

الهوامش

١- مصطفى الجيوسي ، موسوعة علماء العرب المسلمين وأعلامهم ، دار أسامة للنشر والتوزيع ص ١٣٩-١٤٢.
٢- مصطفى لبيب ،العلم عند العرب وأثره في تطوير العلم العالمى، الطبعة الأولى ، المجلد الأول ، ص ١٩٣.
٣- عبد الرحمن حميدة ، أعلام الجغرافيين العرب، دار الفكر بدمشق ، الطبعة الأولى، ١٩٨٤م، ص ٣٤١ .
٤- mathshistory.standrews.as.ac.uk/Biographies/Al-Biruni
٥- علي مصطفى مشرفة و محمد مرسى أحمد. الجبر المقابلة محمد موسى الخوارزمي،الطبعة الأولى ، الجزء الأول ، ص ٢-٤٠ .
٦- علي مصطفى شرفة و محمد مرسى أحمد ، الجبر والمقابلة محمد موسى الخوارزمي ، الطبعة الأولى ، الجزء الأول ، ص ١٣.
٧- كرم حلمي فرحان احمد :التراث العلمي للحضارة الإسلامية في الشام و العراق خلال القرن الرابع الهجري ص ٦٤٢-٦٤٣.
٨- طارق جهلان ، الإرث العربي والحضارات العربية والإسلامية ص ١١٩-١٢٢ .
٩- د.محمد فارس ، موسوعة علماء العرب والمسلمين ،الطبعة الأولى ، ١٩٩٣ ،ص ١٢٩.
١٠- موريس شربل ، موسومة علماء الرياضيات- حياتهم وأثارهم، ص٢٨٣.
١١- قدري حافظ طوقان :تراث العرب العلمي في الرياضيات والفلك، الطبعة ٢٠١٨ ،ص٦٧.
١٢- قدري حافظ طوقان :تراث العرب العلمي في الرياضيات والفلك، الطبعة ٢٠١٨ ، ص٣٩٥-٣٩٦.
١٣- سمث ، تاريخ الرياضيات، جزء الأول ، ص ٢٩٠.
١٤- صالح زكي ، آثار باقية ، مجلد الأول، ص ١٨٣-١٨٤.
١٥- قد حافظ طوقان :تراث العرب العلمي في الرياضيات والفلك، الطبعة ٢٠١٨ ،ص٣١٣.
١٦- سليم الحسني ، ٢٠١١ ، ألف اختراع واختراع :التراث الإسلامي في عالمنا،الطبعة الأولى.
١٧- علي عبدالله الدفاع ، روائع الحضارة العربية الإسلامية في العلوم ص ٦٥-٦٦.
١٨- Marlow Anderson,Victor J.Katz,Robing. Wilson (2008)

المصادر:

١- أحمد عبد الله " أبو ريحان أحمد بن محمد البيروني الخوارزمي -إسهاماته ومنجزاته "
٢- www.muslims-res.com
٣- آلدوميلي" العلم عند العرب واثره في تطور العلم العالم " دار القلم – القاهرة.
٤- آن ماري "شمس العرب تسطع على الغرب" ص ٩٠.
٥- د حسن حميدة الموسوي "أبو ريحان البيروني :لمحات من سيرته وشعره" مجلة الآداب جامعة بغداد- العراق (العدد ٧٤ -٢٠٠٦م).
٦- د.عبد الكريم اليافي "حوار البيروني و ابن سينا" دار الفكر المعاصر – دمشق، ٢٠٠٢م.
٧- د.عبد الرحمن حميدة "أعلام الجغرافيين العرب" ، الطبعة الأولى ،١٩٨٤م.
٨- د. محمد فارس"موسوعة علماء العرب والمسلمين" ، الطبعة الأولى-١٩٩٣م ، ص ١٢٩.

٩- سليم الحسني ، ٢٠١٢ ، ألف اختراع واختراع : التراث الإسلامي في عالمنا، الطبعة الأولى.
١٠- طارق جهلان ، الإرث العربي والحضارة العربية الإسلامية ص ١١٩-١٢٢.
١١- علي عبدالله الدفاع ، روائع الحضارة العربية الإسلامية في العلوم ص ٦٥ .
١٢- علي مصطفى مشرفه، الجبر والمقابلة لمحمد موسى الخوارزمي ، الطبعة الأولى، ص٢-٤٠ ، الجزء الأول.
١٣- كرم حلمي فرحان احمد :التراث العلمي للحضارة الإسلامية في الشام والعراق خلال القرن الرابع الهجري ص ٦٤٢-٦٤٣.
١٤- قدري طوقان : تراث العرب العلمي في الرياضيات والفلك، الهيئة العامة لقصورالثقافة ٢٠٠٨ م.
١٥- مصطفى الجيوسي "موسوعة علماء العرب والمسلمين واعلامهم"، دار اسامة للنشر ،عمان-الاردن ، ص ١٣٩-١٤٢
١٦- مونتجوموي وات "فضل الإسلام على الحضارة الغربية" ص ٨٨-٨٩ .
17- Marlow Anderson,Victor J.Katz,Robing. Wilson (2008) American mathmatician association pp :139
18- MarlowAnderson,VictorJ.Katz,Robin Wilson" Sherlock Holmes in Babylon and Other Tales of MathematicalHistory" MAA Press: An Imprint of the American Mathematical Society, (2008)

Sources:

1- Ahmad Abdullah, "Abu Rayhan Ahmad bin Muhammad Al-Biruni Al-Khwarizmi - His Contributions and Achievements",
2- www.muslims-res.com
3- Al-Dumili, "Science among the Arabs and it's impact on the development of world science," Dar Al-Qalam, Cairo.
4- Anne Marie, "The Arab Sun Shines on the West," p. 90.
5- Dr.Hassan Hamida Al-Musawi, "Abu Rayhan Al-Biruni: Glimpses of His Biography and Poetry," Journal of Arts, University of Baghdad, Iraq (Issue 74-2006).

6- Dr. Abd al-Karim al-Yafi, “The Dialogue of Al-Biruni and Ibn Sina,” Dar Al-Fikr Al-Moasr, Damascus, 2002.
7- Dr. Abd al-Rahman Hamida, “Flags of Arab Geographers” first edition, 1984.
8- Dr. Muhammad Faris, "Encyclopedia of Arab and Muslim Scholars," first edition-1993, pp. 129.
9- Salim Al-Hasani, 2012, 1001 Inventions: The Enduring Legacy of Muslim Civilization: Official Companion to the 1001, first edition.
10- Tariq Jahlan, Arab Heritage and Arab Islamic Civilization, pp. 119-122.
11- Ali Abdullah Al-Difaa, Masterpieces of Arab-Islamic Civilization in Science, pp. 65.
12- Ali Mustafa Musharrafah, Algebra and Muqabala by Muhammad Musa Al-Khwarizmi, first edition, Part One ,pp. 2-40.
13- Karam Helmy Farhan Ahmed: The Scientific Heritage of Islamic Civilization in the Sham and Iraq during the Fourth Century AH, pp. 642-643.
14- Qadri Touqan: The Scientific Heritage of the Arabs in Mathematics and Astronomy, the General Authority for Culture Palaces, 2008.
15- Mustafa Al-Jayousi,“Encyclopedia of Arab and Muslim Scholars”, Osama Publishing House, Amman-Jordan, p.139-142.
16- Montgomery Watt, “The Preference of Islam over Western Civilization,” pp. 88-89.
17- MarlowAnderson,VictorJ.Katz,Robing.Wilson.2008,AmericanMathematicians Association, p:139.
18- MarlowAnderson,VictorJ.Katz,Robin Wilson” Sherlock Holmes in Babylon and Other Tales of MathematicalHistory” MAA Press: An Imprint of the American Mathematical Society, (2008)